Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

RM
2022-2023

On considère deux espaces métriques (E,d),(E',d') et $f : E \to E'$. Soit $a < b$.

1 Espaces des fonctions continues

1.1 Notion de continuité

Définition 1 : On dit que f est continue en a si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E$, $d(a,x) < \alpha \Rightarrow d'(f(\alpha), f(x)) < \varepsilon$.

Remarque 2 : On peut définir de manière plus générale la continuité sur des espaces topologiques : $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si pour tout voisinage W de $f(x)$, alors $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x.

Exemple 3 : Les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.

Proposition (Caractérisation séquentielle de la continuité) 4 : On dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de E tendant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge $f(a)$.

Définition 5 : On dit que f est uniformément continue sur E si $\forall \varepsilon, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E$, $d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f'(y)) < \varepsilon$.

Remarque 6 : L'uniforme continuité implique la continuité. La différence vient du fait que α dépends de a dans la continuité.

Exemple 7 : La fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

Proposition 8 : L'application distance $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est 2-lipschitzienne, donc en particulier continue.

1.2 Fonctions continues sur un compact

Proposition 9 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, où E est compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème (de Heine) 10 : Soit $f : E \to E'$ une application continue avec E compact. Alors f est uniformément continue.

Remarque 11 : La compacité est importante, c'est pour cela que la fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 12 : Soit X un ensemble, on note $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v.n des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ avec $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Alors $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Remarque 13 : Cette métrique permet de caractériser la convergence uniforme d'une suite de fonction.

Proposition 14 : Si $(f_n) : E \to E'$ est une suite de fonction continue convergeant uniformément vers f, alors f est continue.

Théorème (de Dini) 15 : Soit (f_n) une suite de fonctions réelles croissantes, continues et définies sur un compact X. Alors si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur X, alors la convergence est uniforme.

1.3 Densité

Développement (Théorème de Weierstrass) 16 : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomial. **Dev 1**

Remarque 17 : On peut aussi traduire ce théorème par le fait que les fonctions polynomiales sont denses dans l'ensemble $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$.

Corollaire (Théorème de Weierstrass trigonométrique) 18 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est 2π périodique. Alors f est limite uniforme de polynôme trigonométrique, ie de la forme $P : x \to \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$.

Application 19 : On en déduit du théorème de Weierstrass que si $\int_a^b g(x)x^n dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que g est continue, alors g est la fonction nulle.

2 Espace L^p

2.1 Propriétés des espaces L^p

Définition 20 : Pour $p \in [0, +\infty]$, on désigne par $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des applications f de X dans $\mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
On note $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable telles que $\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\} < +\infty$.

Proposition 21 : Pour $p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Théorème (Inégalité de Hölder) 22 : Soient $p \in [1,+\infty]$ et q sont conjugué, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$,$g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 23 : Lorsque $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème (Inégalité de Minkowski) 24 : Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Alors

$$\|f+g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Proposition 25 : Soit $p \in [1,+\infty]$. On pose sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu - p.p.$ On pose alors $L^p(\mu) = \mathcal{L}(\mu)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Remarque 26 : Il faut attention au fait que l'on note abusivement de la même manière f dans $\mathcal{L}^p$ et L^p.

Corollaire 27 : Grâce à l'inégalité de Minkowski, on en déduit que $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel normé pour $\|.\|_p$.

Théorème (de Riesz-Fisher) 28 : Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (complet pour la norme $\|.\|_p$). De plus, tout suite qui converge dans L^p admet une sous suite qui converge μ-p.p.

2.2 Utilisation de la convolution

Définition 29 : On dit que f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si f et g sont convolables, on définit alors le produit de convolution(ou la convolée) de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Remarque 30 : L'espace $(L^1(\mathbb{R}^n), +, ., *)$ est une algèbre commutative sans élément neutre.

Définition 31 : Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives et intégrables sur $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une unité approchée ou approximation de l'unité si

i) $\int_{RR^n} \varphi_n(x)dx = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Pour tout réel strictement positif a, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{\|x\|>a\}} \varphi_n(x)dx = 0.$$

L'unité approchée $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est dite compacte si toutes les fonctions φ_n s'annulent en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 32 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite de réels $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ et la suite suivante

$$\begin{array}{rccl} p_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors (p_n) est une approximation de l'unité.

Théorème 33 : Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi_n * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_n * f$ converge vers f en norme $\|.\|_p$.

Remarque 34 : Ce théorème peut être très utile. En effet, on l'utilise pour démontrer le théorème de Weierstrass énoncé plus haut par la convolution.

2.3 L'espace de Schwarz

Définition 35 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes

i) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii) f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Exemple 36 : La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 37 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par dérivation et par multiplication par les fonctions polynômiales.

Définition 38 : On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ lorsque n tend vers $+\infty$, si pour tout $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, la suite de fonctions $(x \mapsto x^m\varphi^{(p)}(x))_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x^m\varphi^{(p)}(x)$.

Théorème 39 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Théorème 40 : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et a pour automorphisme réciproque $\tilde{\mathcal{F}}$.

Dev 2

Développement (Théorème de Plancherel) 41 : Avec la convention de transformée de Fourier $e^{-ix\xi}$, L'application

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

Remarque 42 : Dans beaucoup d'autre référence, on montre ce prolongement en partant de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela se passe bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème 39.

Remarque 43 : Par abus de notation, on note encore $\mathcal{F}(f)$ ce prolongement qui définie alors la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Il faut donc faire attention à distinguer la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, mais qui coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3 Espace des fonctions holomorphes

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.

3.1 Holomorphie et intégration

Définition 44 : On dit que f est dérivable en $z_0 \in U$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe. Si f est dérivable en tout $z_0 \in U$, alors f est holomorphe sur U. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Exemple 45 : Les fonctions polynomiales et les séries entière sont holomorphes.

Proposition (Condition de Cauchy-Riemann) 46 : On a que $f \in \mathcal{H}(U)$ si et seulement si on a les égalités $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ avec $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Définition 47 : On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle alors cet arc un chemin. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors cette arc est appelé un lacet.

Définition 48 : Soient $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. L'intégrale de f sur γ, notée $\int_\gamma f(z)dz$, est définie par :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Définition 49 : Soient $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ un lacet et $U = \mathbb{C} \setminus im\gamma$. Pour $z \in U$, on pose :

$$ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}dt$$

Remarque 50 : L'application $z \mapsto ind_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On dit que $ind_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ et cela correspond intuitivement au nombre de tours effectué par γ autour du point z.

3.2 Application de l'holomorphie

Théorème (Formule de Cauchy pour un convexe) 51 : Soit γ un lacet dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus \mathrm{im}\gamma$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :

$$f(z)\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Théorème 52 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Alors f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U.

Théorème (Prolongement analytique) 53 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et f analytique sur U. Alors f est identiquement nulle sur U si et seulement si f est identiquement nulle dans un voisinage de a.

Théorème (Zéros isolés) 54 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f analytique sur U non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V autour d'un zéro $u \in Z(f)$ tel que $V \cap Z(f) = \emptyset$.

Remarque/exemple 55 : On utilise ceci sur une fonction $h = f - g$ pour pouvoir étendre l'égalité $f = g$ sur un domaine plus grand. On utilise ce théorème pour montrer que $exp(log(z)) = z$ sur $\mathbb{C}$ car vrai sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Mesures, intégration, ... El Haj Laamri
3. Analyse complexe pour la licence 3 Tauvel
4. isenmann (rip)